Spezielle Relativitätstheorie

Bei der numerischen Behandlung des Zwillingsparadoxons (die mit Mittelstufenmathematik nicht möglich war) wird man den Unterschied zwischen ART, SRT und den „Graubereichen“ am besten erkennen können.

Das Zwillingsparadoxon:

In unserem Teil des Multiversums hat Admiral James T. Würg einen Zwischenstopp auf der Erde zur Sternzeit 2017 (alte Zeitrechnung) eingelegt und der NASA unter einer Tarnidentität den alten Antrieb eines Beibootes aus der *Hyper Rocket Zero* verkauft, dessen Energiezelle sowieso nur noch eine Reichweite von 40.000 Lichtjahren hatte. Lucille würde einen neuen bauen. Außer drei Milliarden Dollar hatte er dafür eine Südseeinsel mit vier Strandbars, ausreichendem (meist weiblichem) Personal bekommen und eine lebenslange Flatrate JÄM.

So ist die NASA erstmals in der Lage, eine *extrasolare* Expedition durchzuführen. Es soll zu einem der damals beliebtesten Sterne der Astronomen gehen, der *Wega* (α Lyrae). Sie ist ca. 28 Lichtjahre entfernt und besitzt einen erdähnlichen Planeten, dessen Existenz die NASA aber erst Ende 2019 bekanntgeben wird. Am 01.01.2020 um 00:00 Uhr wird die Rakete starten.

Bisher waren Raketen der NASA immer nur *ballistisch* betrieben worden. Die Rakete zündete mehrere Minuten, nach Brennschluss waren die Treibstoffvorräte aufgebraucht und das Raumschiff flog mit mehr oder weniger konstanter Geschwindigkeit weiter.

Diese Expedition wird erstmals in der Geschichte in der Lage sein, mit dem neuen Antrieb *konstant* mit 1g $\left(\approx 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)$ zu beschleunigen. Das ist bequem für die Besatzung: Sie unterliegt während des gesamten Fluges der gewohnten Erdbeschleunigung, was dem gefürchteten Muskelschwund entgegenwirkt.

Nach der Hälfte der Flugstrecke wird die Rakete sich im Flug drehen. Die Beschleunigung erfolgt dann ***entgegen*** der Flugrichtung: Das Raumschiff wird verzögert, es wird „gebremst“.

Betrachten wir den Vorgang zuerst rein newtonsch. Dafür genügt Mittelstufenmathematik und wir verfügen über die dafür nötigen Formeln:

Weg-Zeit-Gesetz:	$\boldsymbol{s = \frac{1}{2} * g * t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 * s}{g}}}$
Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:	$\boldsymbol{v = g * t}$

Der Vorgang ist hochsymmetrisch, wir betrachten eine Hälfte der Wegstrecke.
Die Wegstrecke von einem Lichtjahr berechnet sich zu:

$$\boldsymbol{s = c * t \rightarrow 1LJ = 3 * 10^8 \frac{m}{s} * 365d * 24\frac{h}{d} * 60\frac{min}{h} * 60\frac{s}{min} \approx 9{,}46 * 10^{15} m}$$

Die Zeit für den gesamten Hin- und Rückweg beträgt somit newtonsch:

$$\boldsymbol{t = 4 * \sqrt{\frac{2 * s}{g}} = 4 * \sqrt{\frac{2 * 14 * 9{,}46 * 10^{15} m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} \approx 4 * 5{,}2 = 20{,}8\,Jahre}$$

Nur 21 Zeit-Jahre für 56 Lichtjahre? Das macht stutzig …

Der Maximalbetrag der Geschwindigkeit betrüge nach einem Viertel der Zeit:

$$\boldsymbol{v = g * t = 9{,}81\frac{m}{s^2} * 1{,}64 * 10^8 s = 16{,}1 * 10^8 \frac{m}{s}}$$

Das ist mehr als das Fünffache der Lichtgeschwindigkeit. So kann es also wohl nicht gehen …

Betrachten wir jetzt den Vorgang sowohl von der speziellen, als auch von der allgemein-relativistischen Seite her. Was spricht für diese, was für jene Betrachtung? Ganz heuristisch …

Die ART arbeitet in beschleunigten Bezugssystemen. Sie ist eine Theorie der Gravitation. Gravitation bewirkt eine Beschleunigung. Egal ob sich diese dann in einem freien Fall auswirkt, oder ob der Beobachter an seinem Standpunkt festgenagelt ist. Man kann versucht sein, die Beschleunigung des Raumschiffes – die ja konstant ist – mit der *gravitationellen Zeitverzögerung* in einem Gravitationsfeld gleichzusetzen. Diese ist aber bei 1g winzig. Außerdem unterliegt der Erdbeobachter ja einer gleich großen Beschleunigung. Dann würden beide Beobachter aber gleich altern.

Bei unseren vorigen Berechnungen sind wir zu – unrealistisch – hohen Geschwindigkeiten gekommen. Offenbar stößt man also in einen Bereich, in dem die *kinematische Dilatation* über den Lorentz-Faktor der Geschwindigkeit durchaus bedeutsam wird. Das ist der *additiven Wirkung* der Beschleunigung auf die Geschwindigkeit zuzuschreiben.
Diese liegt in *dieser* Größenordnung außerhalb unseres Erfahrungsbereiches.

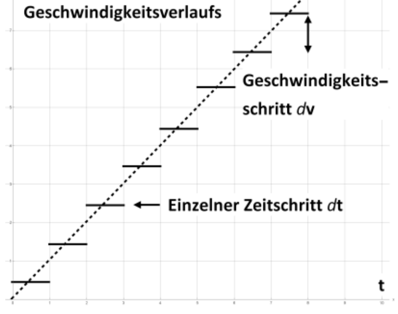
Die Bewegung des Raumschiffes kann man mit dem freien Fall unter Bedingungen der Erdschwere gleichsetzen. Aber solch lange Perioden des freien Falls treten auf der Erde nicht auf. Außerdem verzögert über der Erde bei höheren Geschwindigkeiten die Luftreibung den freien Fall, so dass ein Fallschirmspringer nur bis zu einer konstanten Geschwindigkeit von ca. 200km/h kommt.

Wir werden also mit der SRT arbeiten müssen, obwohl diese eigentlich *ausschließlich* für *Inertialsysteme mit konstanter Geschwindigkeit* ausgelegt ist. Dazu machen wir uns einen mathematischen „Trick“ zunutze. Wir gehen folgendermaßen vor:

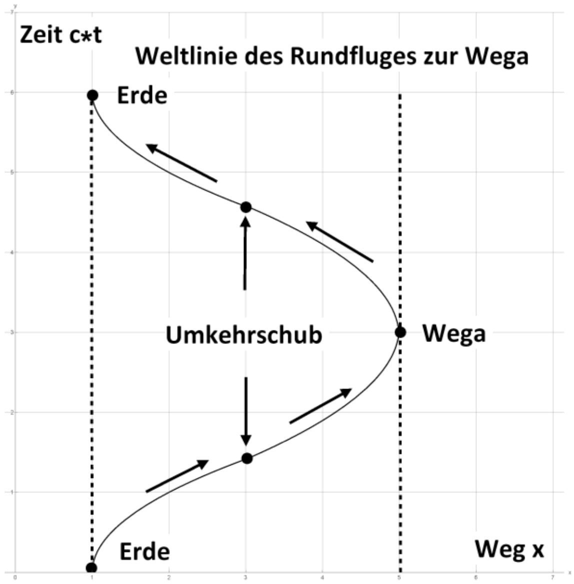
Wir denken uns für kurze Zeitintervalle die Geschwindigkeit des Raumschiffes als konstant. Am Ende dieses Zeitintervalls springt das Raumschiff instantan auf die nächsthöhere Geschwindigkeit usw. Die Geschwindigkeiten zwischen zwei Zeitsprüngen werden dann immer die mittleren Geschwindigkeiten zwischen den Zeitsprüngen sein.
Die *Wirkungen* bezüglich der Zeitdilatation addieren wir dann immer. Das könnte man in *diskreten* Zeit- oder ggfs. sogar Weg*schritten* mit einem Computerprogramm und so – wenn man die Schritte klein genug wählt – dem realistischen Ergebnis beliebig nahe kommen.

Für dieses Verfahren kennt die Mathematik eine bessere Methode: Eine *Integration* zwischen zwei Punkten entspricht immer einer Summation über diese. Das werden wir anwenden.

Im Folgenden werden wir die Variablen für das Raumschiff mit einem Apostroph gegenüber denjenigen für den Erdbeobachter hervorheben, bspw. v'.



Wir gehen also davon aus, dass zu jeder vorherigen Geschwindigkeit v ein neuer „Geschwindigkeitssprung“ dv hinzukommt.



Diese Geschwindigkeitsaddition müssen wir natürlich nach den Regeln der Speziellen Relativitätstheorie durchführen und schreiben:

$$\boldsymbol{v + dv = v + a' * t' * \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

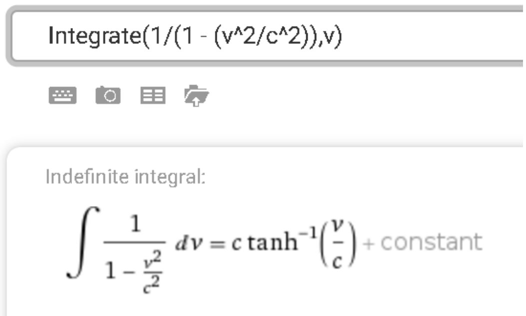
Wir formen nach der Geschwindigkeit im Raumschiffsystem um ($v' = a' * t'$):

$$\boldsymbol{a' * t' * \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = v + dv - v}$$

$$\boldsymbol{a' * t' = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} * dv}$$

Das Integral hierzu ist von Hand lösbar, aber schon etwas mühsam.

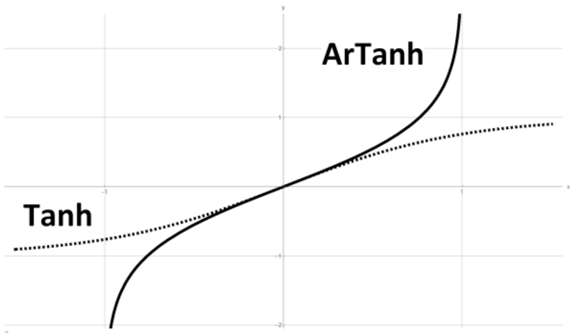
Wir werfen es in *Wolfram Alpha*:



Nach Division durch c erhalten wir also:

$$\boldsymbol{artanh\,\frac{v}{c} = \frac{a' * t'}{c}}$$

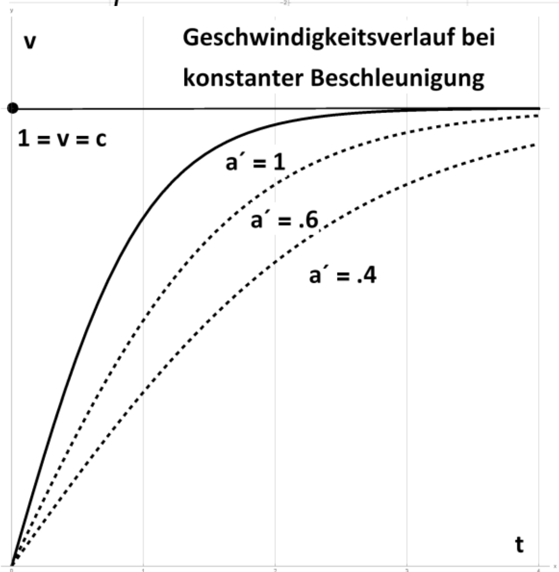
Die *inverse Tangens Hyperbolicus*-Funktion $artanh$ verhält sich zur $tanh$-Funktion wie die $arctan$-Funktion zur Tangensfunktion:



Beide sind die jeweiligen Umkehrfunktionen und machen jeweils deren Wirkung rückgängig. Wenden wir deswegen die $tanh$-Funktion auf beide Seiten der Gleichung an, so erhalten wir:

$$\boldsymbol{tanh\left(artanh\,\frac{v}{c}\right) = tanh\left(\frac{a' * t'}{c}\right)}$$

$$\boldsymbol{\frac{v}{c} = tanh\left(\frac{a' * t'}{c}\right) \rightarrow v = c * tanh\left(\frac{a' * t'}{c}\right)}$$



Damit haben wir einen Ausdruck für das Anwachsen der Raumschiffsgeschwindigkeit erhalten.

Dieser verhält sich auch perfekt „relativistisch“. Er wächst zuerst linear (=newtonsch) an und nähert sich mit höheren Geschwindigkeiten dann asymptotisch der Linie $1 = c$ an.
Er kann sie nie überschreiten.

Etwas trigonometrischer Voodoo:

Sowohl für die „normalen“, als auch für die hyperbolischen Winkelfunktionen gibt es sogenannte *<u>Identitäten</u>*. Man kann damit einen Ausdruck in einer Winkelfunktion durch Ausdrücke in einer anderen Winkelfunktion ersetzen. Die häufigst gebrauchte ist: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Es ist eine *Kunst*, diese so anzuwenden, dass sie bei der Lösung oder Vereinfachung einer Gleichung nützlich sind. Schaut man dabei einem Könner zu, ist man manchmal verblüfft, über welche Umwege er zu einer Vereinfachung kommt. Deswegen spreche ich auch gerne von *trigonometrischem Voodoo*.

Eine der *hyperbolischen* Identitäten ist: $\cosh^2\alpha=\frac{1}{1-\tanh^2\alpha}\rightarrow \qquad \cosh\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}$

Vorhin leiteten wir ab: $\frac{v}{c}=tanh\left(\frac{a'*t'}{c}\right)\rightarrow\left(\frac{v}{c}\right)^2=tanh^2\left(\frac{a'*t'}{c}\right)$

Das werden wir gleich noch benötigen in der Form: $\cosh\frac{a'*t'}{c}=\frac{1}{\sqrt{1-tanh^2\left(\frac{a'*t'}{c}\right)}}$

Aus $tanh^2\left(\frac{a'*t'}{c}\right)=\left(\frac{v}{c}\right)^2$ folgt dann: $\cosh\frac{a'*t'}{c}=\frac{1}{\sqrt{1-tanh^2\left(\frac{a'*t'}{c}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

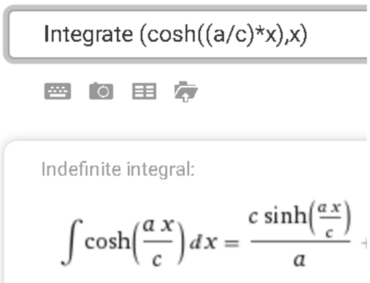
Nach diesem Intermezzo zurück zum Raumschiff:

Verstreicht im Raumschiff ein Zeitraum dt', dann erscheint dieser Zeitraum dem Erdbeobachter verlängert auf:

$$dt=dt'*\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\cosh\frac{a'*t'}{c}$ erhält man:

$$dt=dt'*\cosh\left(\frac{a'*t'}{c}\right)$$



Das integrieren wir nun über t und erhalten:

$$t=\frac{c}{a'}*\sinh\left(\frac{a'*t'}{c}\right)$$

Diesen Ausdruck müssen wir nach t' auflösen. Nur Masochisten machen das von Hand:

<u>Arbeitshilfe: Formel umstellen, Gleichung lösen</u>	**<u>←Link-Navigator</u>**

```
(* Gleichung definieren *)
Solve[t1 == c/a * Sinh[(a * t2)/c]      , t2]
(* Diese Terme nach Wunsch verändern und mit "Evaluate Cell" auswerten *)
```

$\left\{\left\{t2\rightarrow \text{ConditionalExpression}\left[\frac{c\left(i\pi-\text{ArcSinh}\left[\frac{a\,t1}{c}\right]+2\,i\,\pi\,C[1]\right)}{a},\ C[1]\in\text{Integers}\right]\right\},\right.$

$\left.\left\{t2\rightarrow \text{ConditionalExpression}\left[\frac{c\left(\text{ArcSinh}\left[\frac{a\,t1}{c}\right]+2\,i\,\pi\,C[1]\right)}{a},\ C[1]\in\text{Integers}\right]\right\}\right\}$

Ausgewählt : $\frac{c\left(\text{ArcSinh}\left[\frac{a\,t1}{c}\right]\right)}{a}$

Wir wählen von der zweiten Lösung nur den <u>*reellen*</u> Teil: $\boldsymbol{t' = \frac{c}{a'} * arsinh\left(\frac{a' * t}{c}\right)}$

Das setzen wir in die vorige Gleichung ein: $\boldsymbol{v = c * tanh\left(\frac{a' * t'}{c}\right)}$

$$\boldsymbol{v = c * tanh\left(\frac{a' * \frac{c}{a'} * arsinh\left(\frac{a' * t}{c}\right)}{c}\right) = c * tanh\left(arsinh\left(\frac{a' * t}{c}\right)\right)}$$

Das Vereinfachen überlassen wir wieder dem Computer:

$$\boldsymbol{v = \frac{a' * t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a' * t'}{c}\right)^2}}}$$

<u>Arbeitshilfe: Vereinfachen und Ausmultiplizieren</u>

```
(* Term in der eckigen Klammer verändern *)
FullSimplify[ v = c * Tanh[ ArcSinh[(a * t1)/c]] ] // TraditionalForm
```

$$\frac{a\,t1}{\sqrt{\frac{a^2\,t1^2}{c^2} + 1}}$$

Ein zurückgelegter <u>*Weg*</u> ist immer das <u>*Integral*</u> einer <u>*Geschwindigkeit*</u> über eine <u>*Zeit*</u>:

$$\boldsymbol{s_{Erdbeobachter} = \int_{t=0}^{t=t} v * dt = \int_{t=0}^{t=t} \frac{a' * t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a' * t}{c}\right)^2}} * dt = \frac{c^2}{a'} * \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a' * t}{c}\right)^2} - 1\right)}$$

$$\boldsymbol{s_{Raumschiff} = \int_{t=0}^{t=t'} v * dt = \frac{c^2}{a'} * \left(cosh\,\frac{a' * t'}{c} + 1\right)}$$

Dies sind die Wege, wie sie der Erdbeobachter in seiner Zeit t und der Raumschiffbeobachter in seinem Zeitablauf t' messen. Natürlich sind die beiden Wege s gleich.

Wir interessieren uns nur für die verstrichene Zeit der beiden Beobachter nach der Rückkehr. Das macht ja erst das Zwillingsparadoxon aus.

Dafür lösen wir die beiden letzten Gleichungen nach t bzw. t' auf:

Erdbeobachter:

$$\boldsymbol{t = \frac{c}{a'} * \sqrt{\left(1 + \frac{a' * s}{c^2}\right)^2 - 1}}$$

Raumschiffbeobachter:

$$\boldsymbol{t' = \frac{c}{a'} * arcosh\left(1 + \frac{a' * s}{c^2}\right)}$$

Man beachte, dass die Beschleunigung von beiden Beobachtern gleich beurteilt wird.

Beschleunigungen sind absolut!

Die numerischen Berechnungen lassen wir wieder vom Computer ausführen:

```
(* Berechnung der Lebensalterung im Zwillings-Paradoxon *)
(* Definition der Konstanten *)
c :=    299792458*(m/s)                                       (* Lichtgeschwindigkeit *)
a :=    9.81*(m/s^2)                                          (* Erdbeschleunigung *)
Weg :=  14*365*(d)*24*(h/d)*60*(min/h)*60(s/min)*3*10^8*(m/s) (* 14 Lichtjahre *)

(* Berechnung der Lösung *)
Print["Erdbeobachter:"]
(c/a)*Sqrt[(1+(a*Weg)/c^2)^2-1]*4                             (* Zeit in Sekunden *)
% / (365*(d/Jahre)*24*(h/d)*60*(min/h)*60(s/min))             (* Zeit in Jahren *)

Print["Raumschiffbesatzung:"]
(c/a)*ArcCosh[1+(a*Weg)/c^2] *4                               (* Zeit in Sekunden *)
% / (365*(d/Jahre)*24*(h/d)*60*(min/h)*60(s/min))             (* Zeit in Jahren *)
```

Erdbeobachter:

1.88552×10^9 s

59.7894 Jahre

Raumschiffbesatzung:

4.19303×10^8 s

13.296 Jahre

Dies war eine Berechnung mit klassischer Analysis.

Man darf sich nicht täuschen lassen:

- Wir haben die schwierigen Berechnungen vom Computer durchführen lassen.
  Von Hand hätten wir Stunden dafür gebraucht.

- Wir kannten den Lösungsweg: Er steht in vielen Lehrbüchern.
  Man weiß nicht, wie lange große Geister um diesen gerungen haben:
  Offensichtlich ist er keinesfalls.

- Man kann von Glück reden, dass hier eine elementar-analytische Lösung möglich ist.
  In der ART muss man meist noch schwierige Approximationen durchführen.

- Das Zwillingsparadoxon ist aber auch eines der schwierigsten Probleme der SRT.
  Das liegt daran, dass wir hier über die eigentliche SRT mit ihren Inertialsystemen hinausgehen mussten.

  Das Statement: „Für SRT braucht es nur Mittelstufenmathematik“ behält somit weiter seine Gültigkeit. Wenn schwierigere Probleme auftauchen – bspw. in der Hochenergiephysik – dann liegen sie in der anderen Physik und nicht in der SRT.

Allgemeine Relativitätstheorie: Ereignishorizont und innere Schwarzschild-Lösung

Ist für innerhalb des Schwarzschild-Radius überhaupt eine Lösung nötig? Da ist doch ein Schwarzes Loch, oder? Das sind eigentlich zwei Fragen, beantworten wir die zweite zuerst.

Natürlich befindet sich nicht automatisch innerhalb des Schwarzschild-Radius auch ein Schwarzes Loch.

Betrachten wir als Beispiel unsere Berechnung zum Schwarzschild-Radius der Sonne:

$$R_s = \frac{2*M*G}{c^2} = \frac{2*\overbrace{2*10^{30}\cancel{kg}}^{Sonnenmasse}*6,67\ *\ 10^{-11}\ m^{\cancel{3}}/(\cancel{kg}*\cancel{s^2})}{(3*10^8\cancel{m}/\cancel{s})^2} = \frac{2,668*10^{14}}{9*10^{16}}*m = 2.964\,m$$

Der Schwarzschild-Radius ist eine *rechnerische Größe*, keine *physikalische*. Die Sonne *wäre* ein Schwarzes Loch, *wenn* ihre *gesamte* Masse sich *innerhalb* des Radius befinden würde. So befindet sich aber nur ein *geringer* Teil davon „unterhalb" von 2.964m. Im Laufe der Sternentwicklung *kann* die Sonne auch nicht später zu einem Schwarzen Loch werden, weil dazu ihre Masse nicht ausreicht.

Deswegen finden wir im Weltall auch keine Schwarzen Löcher mit Massen kleiner als ca. 5 Sonnenmassen. Da die ART eine *allgemeine Theorie der Gravitation* ist, ist sie aber nicht auf real vorhandene Objekte beschränkt. *Würde* man solche Schwarzen Löcher mit bspw. einer Sonnenmasse finden, wären es sogenannte *ursprüngliche* SL (meist mit dem engl. *primordial* bezeichnet), die noch vom Urknall übrig geblieben wären.

Es wäre auch ein beunruhigendes Gefühl, wenn sich im Inneren der Erde ein SL von - sagen wir mal – 2 mm Größe befinden würde. Das entspräche einer Masse von:

$$R_s = \frac{2*M*G}{c^2} \rightarrow M = \frac{R_s*c^2}{2*G} = \frac{0,002m*(3*10^8\cancel{m}/\cancel{s})^2}{2*6,67\ *\ 10^{-11}\ \cancel{m^3}/(kg*\cancel{s^2})} = 1,34*10^{20}kg$$

Das entspräche einem Anteil von $\frac{1,34*10^{20}kg}{5,97*10^{24}kg} = 0,0025\%$ der Erdmasse. Was würde passieren? Das SL würde sich Schicht für Schicht der darüberliegenden Materie einverleiben, gleichzeitig anwachsen, die oberen Schichten rutschen nach usw., das Ganze in kontinuierlich, bis es sich die gesamte Erdmasse einverleibt hätte und auf 9mm angewachsen wäre. Da das bis dato noch nicht geschehen ist, können wir uns sehr sicher sein, dass wir auf *keinem* SL leben.

Wenn wir im Allgemeinen von einem sphärischen SL ausgehen, dann können wir über den Radius natürlich auch das Schwarzschild-Volumen berechnen, hier für die Sonne:

$$V_{R_s} = \frac{4}{3}*\pi*{R_s}^3 = \frac{4}{3}*\pi*\frac{8*M^3*G^3}{c^6};\ V_{R_s\,Sonne} = \frac{4}{3}*\pi*(2.964m)^3 = 1,1*10^8m^3$$

Das ist natürlich gar nichts gegenüber dem realen Volumen von $1,4*10^{27}m^3$

Mittels dieser Werte lässt sich eine *kritische Dichte* definieren:

$$\rho_k = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}*\pi*\frac{8*M^3*G^3}{c^6}} = \frac{3*c^6}{32*\pi*G^3*M^2}$$

Das darf jetzt nicht als eine konstante Massendichte missverstanden werden, bei deren Überschreiten der entsprechende Raumbereich automatisch zum SL wird.

Gemäß $\boldsymbol{R_s} = \frac{2*M*G}{c^2}$ wächst der Radius proportional zur Masse. Das Volumen aber zur dritten Potenz. So kann es geschehen, dass massive SL eine mittlere Dichte besitzen, die *kleiner* als diejenige von Hauptreihensternen ist.

Ist für innerhalb des Schwarzschild-Radius überhaupt eine Lösung nötig? Gerade haben wir gezeigt, dass durchaus „normale“ physikalische Vorgänge innerhalb des Schwarzschild-Radius stattfinden. Eine andere Frage ist, ob wir diese denn überhaupt beobachten können. Das wird man i.d.R. verneinen müssen. Die Vorgänge in der Sonne werden sich unterhalb von 3km nicht wesentlich von denjenigen bei bspw. 4km unterscheiden und beobachten können wir beide eh nicht.

Man sollte trotzdem wissen, wie sich die *innere* Lösung von der bekannten *äußeren* unterscheidet.

Der *inneren* Schwarzschild-Lösung liegt ein bestimmtes *Materiemodell* zugrunde. Die Materie im Inneren entspricht einer *inkompressiblen Flüssigkeit konstanter Dichte*. Natürlich ist sie statisch, sphärisch symmetrisch, rotiert also auch nicht und ist ungeladen. Welches real existierende, stellare Objekt wäre auch überhaupt signifikant geladen? Die Astronomie kennt keine solchen.

Die innere Schwarzschild-Lösung veröffentlichte der Entdecker nur kurz, nachdem er die äußere Lösung gefunden hatte. In Kugelkoordinaten lautet sie:

$$c^2 d\tau^2 = \frac{1}{4} * \left(3\sqrt{1-\frac{r_s}{r_g}} - \sqrt{1-\frac{r^2 * r_s}{{r_g}^3}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1-\frac{r^2 * r_s}{{r_g}^3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 * \left(d\theta^2 + \sin^2\theta * d\varphi^2\right)$$

Die einzig neue Variable ist $\boldsymbol{r_g}$, der Radius an der Körperoberfläche vom Unendlichen aus gemessen.

Bei $\boldsymbol{r = r_g}$ besitzt sie die gleichen Werte wie die äußere Lösung, was man durch Einsetzen beweist :

$$c^2 d\tau^2 = \frac{1}{4} * \left(3\sqrt{1-\frac{r_s}{r}} - \sqrt{1-\frac{r^2 * r_s}{r^3}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1-\frac{r^2 * r_s}{r^3}\right)^{-1} dr^2 - \cdots =$$

$$c^2 d\tau^2 = \frac{1}{4} * \left(3\sqrt{1-\frac{r_s}{r}} - \sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - \cdots =$$

$$c^2 d\tau^2 = \frac{1}{4} * \left(2\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\right)^2 c^2 dt^2 - \cdots = \left(1-\frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - \cdots$$

Alternativ lässt sie sich mit dem Parameter $\boldsymbol{R^2} = \frac{{r_g}^3}{r_s}$ schreiben zu:

$$c^2 d\tau^2 = \frac{1}{4} * \left(3\sqrt{1-\frac{{r_g}^3}{R^2}} - \sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 * \left(d\theta^2 + \sin^2\theta * d\varphi^2\right)$$

Noch eine Alternativ-Formulierung mit $\eta = \arcsin\frac{r}{R}; \eta_g = \arcsin\frac{r_g}{R} = \arcsin\sqrt{\frac{r_s}{r_g}}$:

$$c^2 d\tau^2 = \left(3\,\frac{3 * \cos\eta_g - \cos\eta}{2}\right)^2 c^2 dt^2 - \frac{1}{\cos^2\eta} dr^2 - r^2 * \left(d\theta^2 + \sin^2\theta * d\varphi^2\right)$$

Dichte:

Da es sich um ein *inkompressibles* Fluid handelt, ist die Dichte überall gleich:

$$\boldsymbol{\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} * r_g{}^3} = \frac{3}{\kappa * R^2}\,; \kappa = 8\pi * \frac{G}{c^2} \rightarrow \rho = \frac{3 * c^2}{8\pi * G * R^2}}$$

Dabei ist $\boldsymbol{\kappa = 8\pi * \frac{G}{c^2}}$ die Einsteinsche Konstante, wie sie auch in der Formulierung der Feldgleichungen auftaucht.

Druck:

Der Druck beträgt:

$$\boldsymbol{p = \rho * c^2 * \frac{\cos\eta - \cos\eta_g}{3 * \cos\eta_g - \cos\eta}}$$

Er ist isotrop, wirkt also in alle Richtungen gleichermaßen. Er kann aus der Metrik des Einstein-Tensors $G_{\pi\nu}$ abgeleitet werden. Dieser ist streng diagonal, d.h. alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale sind Null und es treten keine Scherspannungen auf. An der Oberfläche ist der Druck Null und wächst kontinuierlich zum Zentrum hin an.

Stabilität:

Der Druck wird unendlich, falls $\boldsymbol{\cos\eta_g = \frac{1}{3}}$ Das entspricht einem Winkel von $\boldsymbol{\eta_g = 70{,}5°}$ und $\boldsymbol{r_S = \frac{8}{9} * r_g}$ Dann tritt ein Gravitations-Kollaps mit Übergang zum Schwarzen Loch ein. Die innere Schwarzschild-Lösung wird dann nicht mehr anwendbar, u.a. weil dies ein zeitabhängiger Vorgang ist.

Gravitationelle Rotverschiebung:

Diese beträgt an der Oberfläche:

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{\cos\eta_g} - 1}$$

Aus der Stabilitätsbedingung $\boldsymbol{\cos\eta_g > \frac{1}{3}}$ folgt damit eine Beschränkung von z auf Werte kleiner 2.

Die Visualisierung geschieht über das *Flammsche Paraboloid*, das folgendermaßen konstruiert wird: