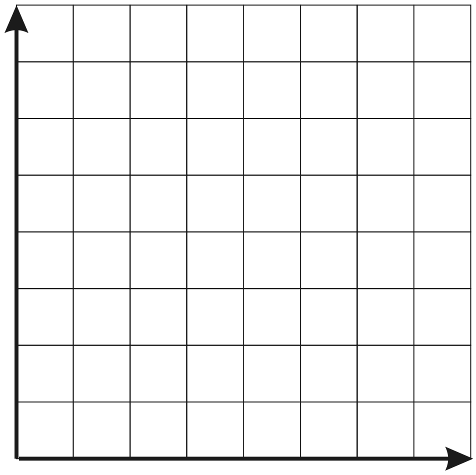
<u>Exkurs: Koordinatensysteme</u>

Herleitung der Raum-Zeit-Diagramme



Das ist unsere Raumzeit.

So mögen wir sie: Ordentlich, gerade und aufgeräumt.

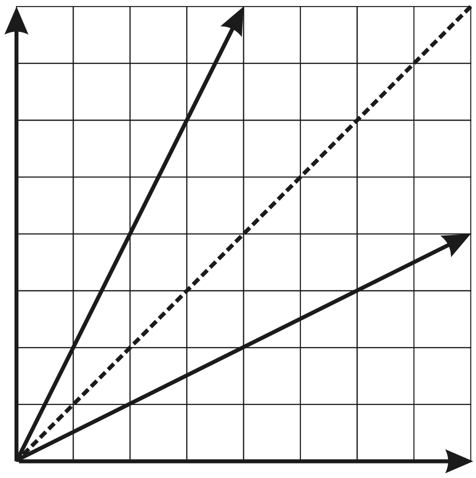
Der vertikale Pfeil bildet unsere Zeitlinie ct.

Der horizontale Pfeil bildet unsere Ortslinie l.

Beide stehen senkrecht aufeinander, ein Winkel von 90°.

Wir haben auch ein Gitternetz, in welchem wir Ereignisse in der Raumzeit eintragen können.

Wir fügen eine Lichtgrenze ein, sowie die Zeitlinie und die Ortslinie eines bewegten Beobachters:



Der bewegte Beobachter hat eine Geschwindigkeit von 0,5c.

Woran erkennen wir das?

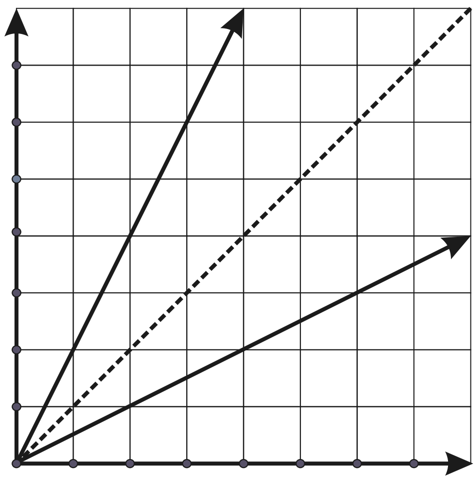
Nun, während für uns 8 Zeiteinheiten ablaufen – vom Ursprung bis zur Spitze des Pfeils – bewegt er sich um 4 Ortseinheiten nach rechts.

Seine Geschwindigkeit ist dann:

$$\boldsymbol{v} = \frac{s}{t} = \frac{4\ Ortseinheiten}{8\ Zeiteinheiten} = \mathbf{0{,}5}\ {}^{\boldsymbol{OE}}\!/_{\boldsymbol{ZE}}$$

Unsere Einheiten können bspw. Lichtsekunden sein.

Wir fügen *Skalierungspunkte* an *<u>unserer</u>* Zeitachse und Ortsachse ein:



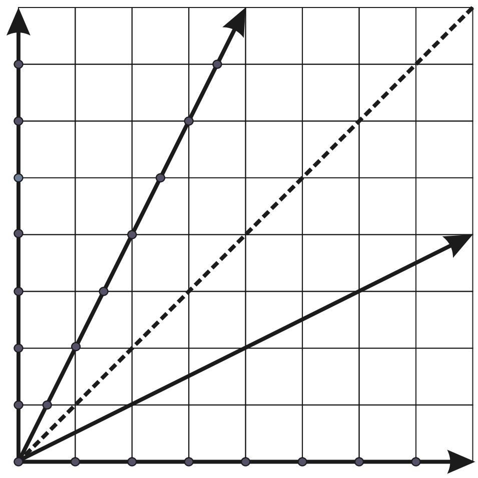
Die Ziffern brauchen wir in einer solch kleinen Raumzeit nicht.

Mithilfe unserer Skalierungspunkte können wir Immer leicht die Koordinaten eines Ereignisses abzählen.

Unsere Raumzeit hat 8*8 = 64 *<u>ganzzahlige</u>* Koordinatenpunkte.

Natürlich können wir in Gedanken unendlich viele weitere, reelle Koordinatenpunkte hinzufügen.

Jetzt müssen wir noch Skalierungspunkte für den **<u>bewegten</u>** Beobachter anbringen …



Wir probieren das mal für den bewegten Beobachter an seiner Zeitlinie aus.

Der Gedanke bietet sich an, seine Skalierungspunkte für die Zeit dorthin zu setzen, wo auf der Zeitlinie des Ruhebeobachters auch Skalierungspunkte angebracht sind.

Wir brauchen die Skalierungspunkt des RB nur horizontal zu verschieben, bis sie auf die Zeitlinie des BB treffen.

Schnell gesagt und getan.

Wir sollten uns jetzt kritisch prüfen, ob unsere Vorgehensweise auch physikalisch richtig ist.

Ein Skalierungspunkt auf der Zeitachse des RB bedeutet ja, dass gerade die Zeit $t = 1\ Sekunde$ verstrichen ist.

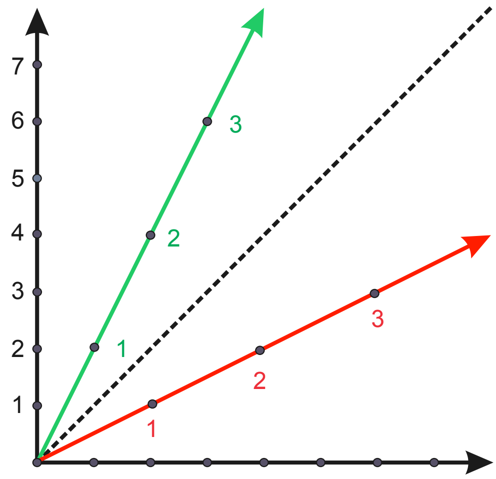
Das müsste doch auch so für den BB gelten?

Nein, das gilt so nicht! Der BB unterliegt ja aus unserer Sicht einer *Zeitdilatation*. Die Zeit verläuft für ihn langsamer. Während für uns eine Sekunde verstreicht, verstreicht ja für ihn *weniger* als 1 Sekunde.

Müssen wir jetzt den Zeitskalierungspunkt für den BB höher oder niedriger anbringen, als den entsprechenden Punkt für den Ruhebeobachter?

Kleine Plausibiltätsüberlegung: Nehmen wir an, die Uhren beim BB würden gerade mal halb so schnell laufen, wie unsere. Dann müsste, wenn auf unserer Uhr „1s" steht, beim BB „0,5s" stehen. Wenn auf unserer Uhr „2s" steht, bei ihm „1s".

Wir werden also beim BB jeden zweiten Punkt auslassen, dann wird es schon klappen. Machen wir vorsichtshalber Ziffern an die Skalierungspunkte, damit wir nicht den Überblick verlieren. Auch das Gitternetz könnte jetzt irritieren, lassen wir es weg:



Jetzt sind für den BB sowohl die Zeitachse, als auch die Ortsachse skaliert.

Rechnen wir mal schnell aus, welche Geschwindigkeit der so skalierte BB hätte. Sie ist jetzt *anders*, als im ersten Beispiel!

Er unterliegt einer Zeitdilatation von 0,5.

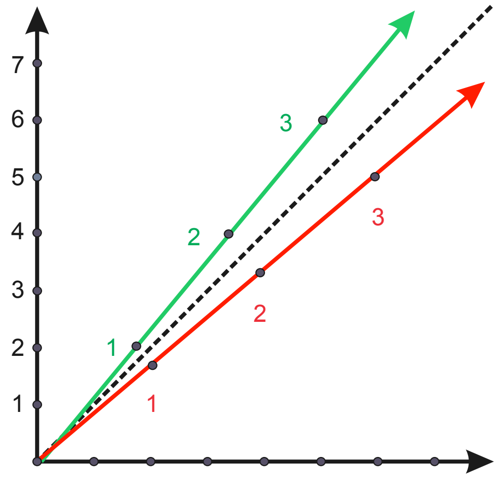
Es gilt also: Wenn der RB $t_R = 1s$ misst, misst der BB $t_B = 0{,}5s$.

Zeitdilatation: $\boldsymbol{t_B = t_R * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0{,}5 = 1 * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Quadrieren: $\boldsymbol{0{,}25 = 1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Umstellen: $\boldsymbol{\frac{v^2}{c^2} = 0{,}75}$

Durch Wurzelziehen erhalten wir dann: $\boldsymbol{\frac{v}{c} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866}$

Der bewegte Beobachter, für den diese Zeitdilatation gilt, ist also deutlich schneller, als derjenige im ersten Beispiel. Wir müssen die Orts- und Zeitlinien für den BB neu zeichnen. Die Skalierung stimmt aber jetzt.



Dieser BB hat jetzt den Dilatationsfaktor 0,5.

Seine Geschwindigkeit beträgt 0,866c.

Wir können nun Weltlinien des BB korrekt skalieren, wenn wir den *Dilatationsfaktor* kennen.

Wie skalieren wir ihn aber, wenn wir diesen nicht kennen, sondern nur seine *Geschwindigkeit* v wissen?

Eine Möglichkeit dazu ist, ihn an der *Eichhyperbel* abzulesen.
Siehe dazu die Ausführungen in dem betreffenden Exkurs.

Eine andere Möglichkeit ist, die Skalenlänge im Verhältnis zum Ruhebeobachter auszurechnen.

Beispiel: Die Geschwindigkeit des BB sei $v = 0{,}7c$. Die Skalenlänge des RB sei $SL_R = 1cm$.

Wir nehmen die Formel für die Zeitdilatation (oder der Längenkontraktion) und ersetzen:

$$\boldsymbol{t_B} = \boldsymbol{t_R} * \sqrt{\mathbf{1} - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \boldsymbol{SL_B} = SL_R * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1cm * \sqrt{1 - 0{,}7^2}$$

$$\boldsymbol{SL_B} = 1cm * \sqrt{1 - 0{,}49} = 1cm * \sqrt{0{,}51} = \mathbf{1cm} * \mathbf{0{,}714}$$

Jetzt gilt es, keine voreiligen Schlüsse zu ziehen!

Dieser Wert bedeutet, dass die Skala des BB 0,714 anzeigt, wenn beim RB 1,0 angezeigt wird!

Wir wollen aber wissen, wie viele cm wir für die Skaleneinheit „1" beim BB auftragen müssen.

Wir brauchen also den *Kehrwert* dieser Zahl. Der Kehrwert $\frac{1}{0{,}714}$ beträgt **1,40**.

$\boldsymbol{Beweis}$: $1 * SL_R = 0{,}714 * SL_B$. *Wir teilen beide Seiten durch* $0{,}714$ *und erhalten* $\mathbf{1{,}40} * \boldsymbol{SL_R} = \boldsymbol{SL_B}$

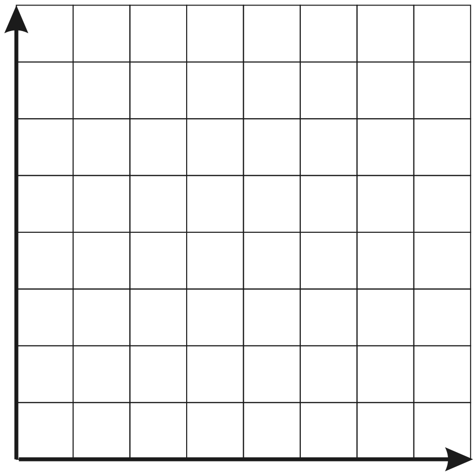
Wir müssen deswegen so oft die Länge von 1,4cm an der Zeitlinie des BB auftragen, wie wir Skalenpunkte benötigen.

Man hätte diesen Wert auch erhalten, wenn wir die umgekehrte Formel : $t_R = t_B * \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

angewendet hätten …

Der bewegte Beobachter bekommt sein eigenes Gitternetz

Der Ruhebeobachter hatte so ein schönes Gitternetz:



Wir sollten dem bewegten Beobachter unbedingt auch ein solches verpassen!

Kann er nicht das Gitternetz des RB mitbenutzen?

Auf keinen Fall! Seine Skaleneinheiten - und nichts anderes stellen die Gitternetzlinien dar - sind ja vollkommen anders, als die Skaleneinheiten des RB.

Nur im vorher sorgfältig konstruierten Fall hat es zufällig mal gepasst, dass die Skalierungen mit dem Faktor 2 *zufällig* ähnliche Skalenpunkte besaßen.

Das gibt es nicht häufig.

Welche Anforderungen muss unser Gitternetz für den BB eigentlich erfüllen? Es sind die gleichen, wie für den Ruhebeobachter:

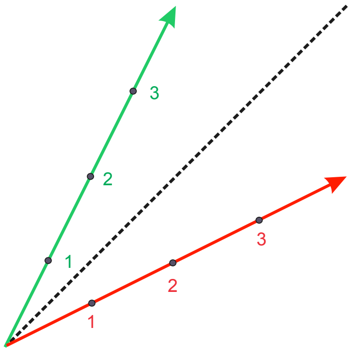
- Die Gitternetzlinien müssen in gleichen Abständen zueinander sein

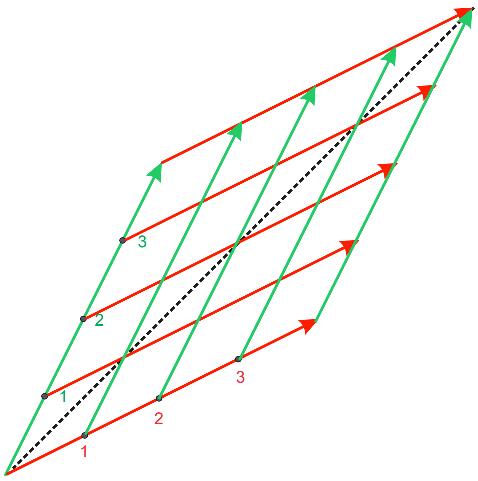
  Das Problem haben wir mit unserer Skalierungsmethode im letzten Abschnitt bereits gelöst …

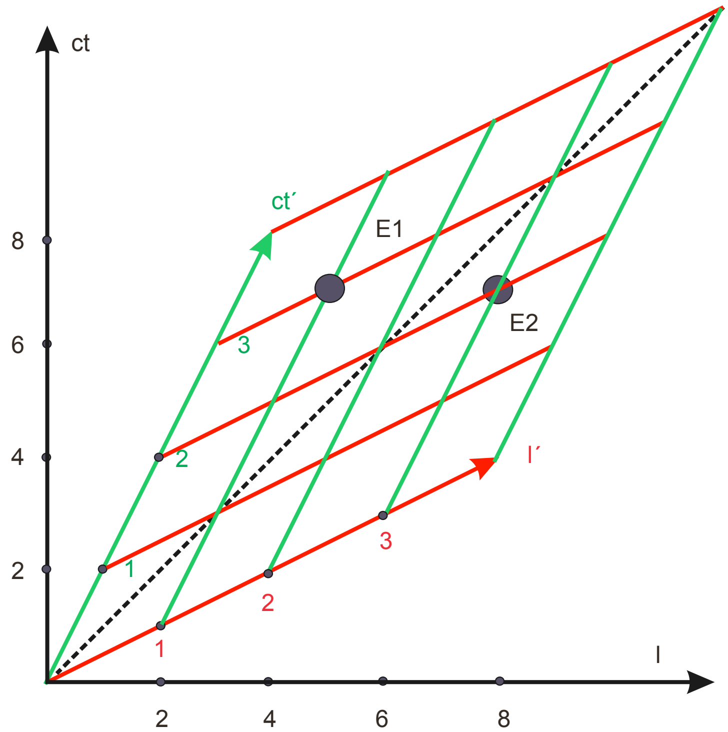
- Die Gitternetzlinien müssen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen

Aber, wie soll das gehen bei schräg zueinander verlaufenden Achsen?

Nicht anders, wie beim rechtwinkligen Koordinatensystem. Wir verschieben die Koordinatenachsen parallel zu sich selbst bis zu den Skalierungspunkten der anderen Achse.







Unser Koordinatensystem für den bewegten Beobachter ist nun vollständig.

Er besitzt ein **schrägwinkliges KOS**.

Wir haben es aus Gründen der Anschaulichkeit so skaliert, dass *einer* Einheit beim BB genau *zwei* Einheiten beim RB entsprechen.

Im Umfeld des BB geschehen die Ereignisse E1 und E2. Er vermisst diese in seinem Bezugssystem und stellt deren Koordinaten fest:

E1 (ct´ = 3 | t´ = 1)

E2 (ct´ = 2 | t´ = 3)

Mit bloßem Auge stellt man schon fest, dass trotz unserer Bemühungen um ein ganzzahliges Verhältnis der Skalierungen die Koordinaten *der Ereignisse* für den Ruhebeobachter vollkommen anders sind.

Sicherlich keine ganzen Zahlen!

Man muss also nun einen Weg finden, um die Koordinaten des bewegten Beobachters in die Koordinaten des Ruhebeobachters umwandeln (*transformieren*) zu können.

Natürlich auch in umgekehrter Richtung.

Das Verfahren hierzu heißt *Lorentz-Transformation*.

Ihm ist ein eigener Exkurs gewidmet, siehe:

Exkurs: Beispiele für eine Lorentz-Transformation