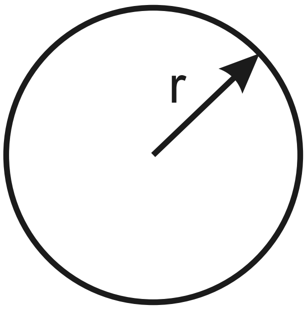
Exkurs: Die Raumkrümmung berechnen und Gravitationswellen

Ausschließlich für Hartgesottene: Die Raumkrümmung …

Nur beim *Kreis* ist die *Krümmung* wirklich einfach zu berechnen:



Der *Krümmungsradius* r_K entspricht dem Radius des Kreises *r*.

$$r_K = r$$

Bei Kreisen mit Radien $r = 1, 2, 3, 4, 5$ … ist der Krümmungsradius eben $r_K = 1, 2, 3, 4, 5$ …

Die *Krümmung* R_K selbst ist dann der *Kehrwert* des Krümmungsradius:

$R_K = \frac{1}{r_K}$. Für Kreise mit Krümmungsradien $r_K = 1, 2, 3, 4, 5$ … gilt also:

$$R_K = \frac{1}{r_K} = \frac{1}{1,} \frac{1}{2,} \frac{1}{3,} \frac{1}{4,} \frac{1}{5,} \ldots$$

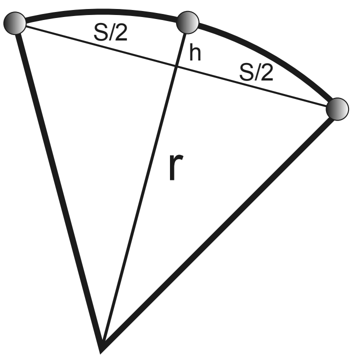
Es ist unschwer zu erkennen, dass die Krümmung umso stärker ist, je kleiner der Krümmungsradius und umso schwächer, je größer der Krümmungsradius wird.

Das gilt in unserer Raumzeit ebenso. Wir wollen dies in einem Beispiel für die Raumzeit auf der Erde berechnen. Dabei wollen wir beweisen, dass:

- Die Raumzeit auf der Erde nur minimal gekrümmt ist.
- Dies einem riesigen Krümmungsradius entspricht.
- Die Objekte am gleichen Ort unabhängig von ihrem Bewegungszustand der gleichen Raumkrümmung unterliegen. Und sich ihr entsprechend bewegen.

Wir haben aber überhaupt kein Werkzeug an der Hand, um die Krümmung eines anderen Objektes, als eines Kreises zu berechnen.

Wir gehen in eine beliebige Formelsammlung und finden dort für ein Kreissegment ungefähr folgende Skizze und Formel vor:



Die dabeistehende Formel lautet:

$r = \frac{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + h^2}{2 * h}$. Offensichtlich kann man den Radius eines Kreises berechnen, wenn man die Werte für die drei grauen Punkte kennt.

Die Formel kann man noch etwas vereinfachen. Für große Radien - die wir erwarten - ist eine sehr gute Annäherung: $\boldsymbol{r = \frac{s^2}{8 * h}}$

Jetzt besitzen wir eine Formel. Wir brauchen nur noch ein Problem dazu …

Wir werfen einen Ball mit $10\,\frac{m}{s}$ schräg unter einem Winkel von 45° weg. Seine Bahn wird die einer Wurfparabel sein, wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen. Er wird nach 10m wieder auf den Boden auftreffen.

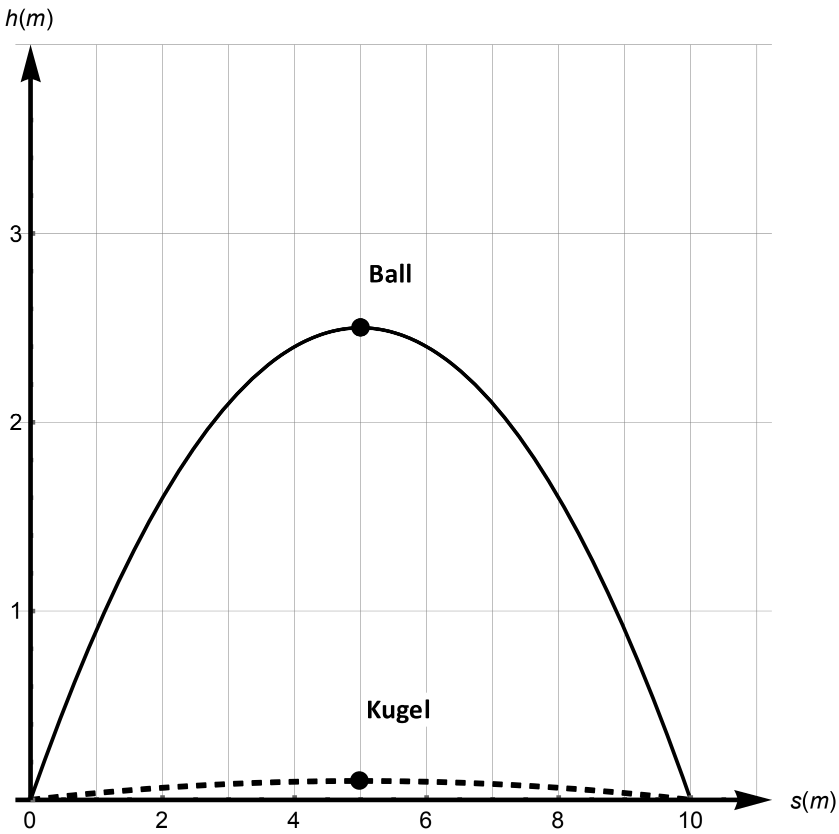
Gleichzeitig feuern wir eine Gewehrkugel mit $500\,\frac{m}{s}$ *ganz leicht schräg* ab, so dass sie auch wieder nach 10m auf dem Boden auftrifft. Das geht: *Der Abschusswinkel muss 0,011459° sein …*

<u>Wir berechnen noch schnell die</u>:

<u>Flugdauern</u>: $Ball\ t = \sqrt{2}s \approx 1{,}414s, \quad Kugel\ t = 0{,}02s$

und

<u>Scheitelhöhen</u>: $Ball\ h = 2{,}5m, \quad Kugel\ h = 0{,}0005m$



Zwei solch unterschiedliche Flugbahnen sollten doch wohl auch eine deutlich unterschiedliche Spur in der Raumzeit hinterlassen?

(Die Gewehrkugel ist natürlich <u>nicht</u> maßstäblich eingezeichnet …)

Jetzt folgt die Berechnung des Krümmungsradius.

Zur Berechnung des Krümmungsradius benötigen wir nach der Formel $\boldsymbol{r_K} = \frac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{8*h}}$ die *Wurfweite* s und die *Scheitelhöhe* h.

- Die *Wurfweite* von Ball und Kugel in der Raumzeit drücken wir über ihren <u>*Lichtweg*</u> aus:

  $Ball\ \ :\boldsymbol{s} = c * \boldsymbol{t} = 3 * 10^8 \frac{m}{s} * \boldsymbol{1,414s} \qquad = \boldsymbol{4,24 * 10^8 m}$

  $Kugel: \boldsymbol{s} = c * \boldsymbol{t} = 3 * 10^8 \frac{m}{s} * \boldsymbol{0,02s} \qquad = \qquad \boldsymbol{6 * 10^6 m}$

- Die *Scheitelhöhe* behalten wir in üblichen SI-Einheiten:

  $Ball\ \ : \boldsymbol{h} = \qquad \boldsymbol{2,5m}$

  $Kugel: \boldsymbol{h} = \boldsymbol{5 * 10^{-4} m}$

Wir setzen in die Formel $r_K = \frac{s^2}{8*h}$ die obigen Daten ein:

$$Ball\ \ : \quad \boldsymbol{r_K} = \frac{s^2}{8*h} = \frac{(4{,}24 * 10^8 m)^2}{8 * 2{,}5m} = \frac{1{,}8 * 10^{17} m^{\cancel{2}}}{20\cancel{m}} \quad = \boldsymbol{9 * 10^{15} m}$$

$$Kugel\ \ : \boldsymbol{r_K} = \frac{s^2}{8*h} = \frac{(6 * 10^6 m)^2}{8 * 5 * 10^{-4} m} = \frac{3{,}6 * 10^{13} m^{\cancel{2}}}{4 * 10^{-3} \cancel{m}} \quad = \boldsymbol{9 * 10^{15} m}$$

Die Überraschung ist groß: Der Krümmungsradius beider - doch so verschiedener - Objekte ist gleich.
Der Wert - das überrascht jetzt weniger - des Krümmungsradius ist riesig. $9 * 10^{15} m$ entsprechen ungefähr einem Lichtjahr: $360\ Tage * 86.400\ Sekunden * 3 * 10^8 \frac{m}{s} = 9{,}3 * 10^{15} m.$

Der Kehrwert des Krümmungsradius ist die Krümmung selbst: $R_K = \frac{1}{r_K} = \frac{1}{9*10^{15} m} = 1{,}11 * 10^{-16} \frac{1}{m}$

Unser Rezept war einfach: Führe ein Experiment durch, bei dem sich das Objekt der betr. Raumzeit in Trägheitsbewegung befindet. Suche drei signifikante Orte, die zueinander eine Entfernung im Abstand zum Zentralkörper besitzen und berechne den Krümmungsradius ihrer Bahn. Berechne nach Belieben dann das Reziproke.
Eine Formel ist ganz nett. Wenn man sie aus den elementarsten Überlegungen heraus nachbauen kann ist es netter …
Obige Prozedur rückwärts abgespult und verallgemeinert kommt man zu den einfachen Formeln:

Krümmungsradius: $\boldsymbol{r_K} = \frac{\boldsymbol{c^2}}{\boldsymbol{g}}$

Krümmung: $\boldsymbol{R_K} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r_K}} = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{c^2}}$

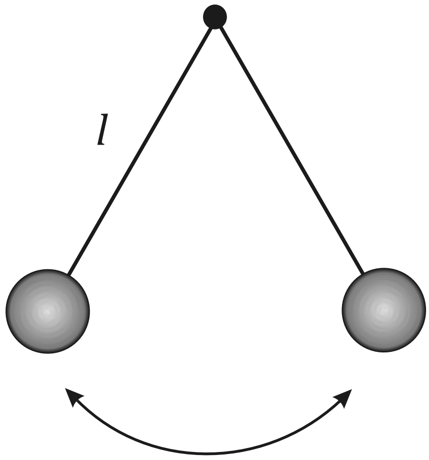
Mit dem gerundeten Wert von $10 \frac{m}{s^2}$ für die Erdbeschleunigung g erhält man die obigen Werte.

So einfach ist das? Ja, es ist wirklich so einfach.

Jetzt lösen wir das Versprechen ein, mit einer Pendeluhr die Raumkrümmung zu bestimmen:

Wie man mit einer Pendeluhr die Raumkrümmung misst

Die Schwingungsdauer einer Pendeluhr hängt in scheinbar komplizierter Art und Weise von der Pendellänge und der Erdbeschleunigung ab: $T = 2 * \pi * \sqrt{\frac{l}{g}}$



Da ist ja sogar die Formel für die Raumkrümmung einfacher: $R_K = \frac{g}{c^2}$

Wir stellen sie nach $\boldsymbol{g}$ um: $\boldsymbol{g = R_K * c^2}$ und setzen es in $\boldsymbol{T = 2 * \pi * \sqrt{\frac{l}{g}}}$ ein:

$$\boldsymbol{T = 2 * \pi * \sqrt{\frac{l}{R_K * c^2}}}$$

Für die Schwingungsdauer haben wir bei $l = 1m$ eine Zeit von $T = 2s$ gemessen und setzen ein:

$$2s = 2 * \pi * \sqrt{\frac{1m}{R_K * c^2}}$$

Wir quadrieren:

$$4s^2 = 4 * \pi^2 * \frac{1m}{R_K * c^2}$$

Multiplizieren mit R_K und dividieren durch $4s^2$ sowie einsetzen von $c^2 = 9 * 10^{16} \frac{m^2}{s^2}$ ergibt:

$$R_K = 4 * \pi^2 * \frac{1\cancel{m}}{4\cancel{s^2} * 9 * 10^{16} \frac{\cancel{m^2}}{\cancel{s^2}}} = \frac{\pi^2}{9 * 10^{16}\, m} = \frac{9{,}9}{9 * 10^{16}\, m}$$

Und das Ergebnis lautet: $\boldsymbol{R_K = 1{,}1 * 10^{-16} \frac{1}{m}}$

So hätte der Bauer die Raumkrümmung in der Wohnstube bestimmt …
Alternativ benutzt man irgendein Pendel, misst seine Länge mit dem Metermaß und seine Schwingungsdauer mit einer Stoppuhr. Die Raumzeit besitzt halt nur die Dimensionen Länge und Zeit. Mehr braucht man nicht.
Noch ein Hinweis: Für sehr schnell bewegte Beobachter muss diese Formel noch relativistisch modifiziert werden zu: $\boldsymbol{R_K = \frac{g}{v^2} * (1 + \frac{v^2}{c^2})}$